数理解析研究所講究録
283巻 1976年 13-24

組み合わせPontryagin類

Gabrielov, Gel'fand, Losik ; "Combinatorial calculation of characteristic classes" ; Funct anal. and appl. '75 の紹介

東大 理 大学院 土屋信雄

§1. 定理のStatement

1.1 Abel-Rogersの函数 (cf. Coxeter, "The function of Schläfli and Lobatschevsky", Quart. J. Math. 6 (1935) 13~29)

<u>定義</u> C^∞-函数 $\Phi : \mathbb{R}-\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次式で定義する。

$$\Phi'(x) = \log|x|/x-1 - \log|x-1|/x \ , \quad \Phi(-1)=\Phi(\tfrac{1}{2})=\Phi(2)=0.$$

1.2 $X^4 = \bigcup X_i^{4-p}$ を，滑らかな境界のない向きづけられた，コンパクト4次元多様体の滑らかな三角形分割とする。$(4-p)$次元単体X_i^{4-p}に対してS_i^{p-1}をそのまつわり複体とする。S_i^{p-1}には，X_i^{4-p}の向きと，Xの向きとから決まる向きを入れておく。D_i^pをp次元球体の単体分割で，その境界はS_i^{p-1}であり，内部には頂点を持たないものとする。今$X_i^{4-p} \subset X_j^{4-p+1}$のとき，$X_j^{4-p+1}$に対応する$S_i^{p-1}$の頂点を$v_j$と書く。$B_{ij}^p = \mathrm{Star}(v_j, D_i^p)$とする。

$\partial B_{ij}^{p} = \mathrm{Star}(v_j, S_i^{p-1}) \cup \mathrm{Link}(v_j, D_i^{p})$ である。∂B_{ij}^{p} において，$\mathrm{Star}(v_j, S_i^{p-1})$ を D_j^{p-1} に張り替えて得られる，$(p-1)$ 次元球面の semi-simplicial な分割を S_{ij}^{p-1} とする。D_{ij}^{p} を p 次元球体の semi-simplicial な分割で，境界は S_{ij}^{p-1} であり，内部に頂点を持たないものとする。D_{ij}^{p} には D_j^{p-1} の向きから決まる向きを入れておく。

1.3. <u>法ベクトル</u>　$X_i^{4-p} < X_j^{4-p+1} = X_i^{4-p} * v_j$ のとき，X_i^{4-p} 上のベクトル場 m_{ij} を，$m_{ij}(x) = \overrightarrow{xv_j}$ で定義して，X_i^{4-p} の X_j^{4-p+1} 内での法ベクトルと呼ぶ。

1.4. <u>General position の仮定</u>　$X_j^1 < X_{k_1}^2, X_{k_2}^2, X_{k_3}^2$ とするとき，各点 $x \in X_j^1$ で，$m_{jk_\nu}(x)$; $\nu = 1, 2, 3$ は独立であるとする。

1.5. $X^4 = \bigcup X_i^{4-p}$，$X_j^1 < X_k^2$ に対し D_{jk}^3 の非退化3単体 Δ_μ を考える。$\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ を Δ_μ の頂点とする。α_i は X_j^1 を含む2単体 $X_{\alpha_i}^2$ の index である。$\Delta_\mu = \Delta^3(\alpha_1, \cdots \alpha_4)$ （向きもこめて）であるとき $\chi(\Delta_\mu)_{(x)} = bc/ad_{(x)}$; ここに $m_{j\alpha_1}(x) = a(x) m_{j\alpha_3}(x) + b(x) m_{j\alpha_4}(x)$，$m_{j\alpha_2}(x) = c(x) m_{j\alpha_3}(x) + d(x) m_{j\alpha_4}(x)$，mod $TX_k(x)$ in $TX(x)$ とする。

1.6. <u>定理 I</u>　$(p_1(X), X)$ を X の Pontryagin 数とするとき，

$$(p_1(X), X) = \sum_{i : X_i^0} \sum_{j : X_j^1 > X_i^0} \sum_{k : X_k^2 > X_j^1} \sum_{\Delta_\mu \in D_{jk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \frac{1}{8\pi^2} \text{亜}(\chi(\Delta_\mu)(X_i^0))$$

ここに ε_{ij} は X_i と X_j の結合係数をあらわす。

1.6. Gel'fand らは，構成法を工夫することによって，1.5. の式が，ある仮定の下に，純粋に組み合わせ的に表現できることを示した。

§2 単体的 de Rham 複体と Chern-Weil 準同型

$X^n = \bigcup X_i^{n-p}$ を滑らかな多様体の滑らかな三角形分割とする。以下 X，X_i^{n-p} 等はその意味で用いる。

<u>注意</u> 繁雑さをさけるため，次元にのみ関係する符号を省略したところがある。

2.1. 単体的 de-Rham 複体

<u>定義</u> $C^{p,q} = \sum_{i:X_i^{n-p}} \Omega^q(X_i^{n-p})$，$d : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$ を外微分，$\delta : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$，を $\delta\{\varphi_j\} = \{\psi_i\}$，$\psi_i \in \Omega^q(X_i^{n-p-1})$，$\psi_i =$
$= \sum_{j:X_j^{n-p} > X_i^{n-p-1}} \varepsilon_{ij}\,\varphi_j$ で定義する。

二重複体 $\{C^{p,q}; d, \delta\}$ を単体的 de-Rham 複体，$C^{p,q}$ の元を (p,q)-鎖 と呼ぶことにする。

Z^r を分割 $\bigcup X_i^{n-p}$ に横断的な，区分的に滑らかな X の chain とするとき，$\{\varphi_i\} \in \bigoplus_{p+q=r} C^{p,q}$ に対して，積分 $(\{\varphi_i\}, Z) =$
$= \sum_p \sum_{i:X_i^{n-p}} \int_{Z \cap X_i} \varphi_i$ が，自然に定義できる。

<u>de Rham の定理</u> 積分による pairing により，次の同型

が成立する。

$$H^*(\bigoplus_{p+q=r} C^{p,q};\ d\pm\delta) \approx H^*(X;\mathbb{R}).$$

2.2. difference cochain ; $E\to M$を滑らかな$\mathbb{R}^n$-bundle, $\omega_0,\cdots,\omega_\ell$を$E$の接続とする。$\Delta^\ell$を標準$\ell$単体として, $\widetilde{\omega}_{01\cdots\ell}$を, $E\times\Delta^\ell\to M\times\Delta^\ell$の接続, $\widetilde{\omega}_{01\cdots\ell}=t_0\omega_0+\cdots+t_\ell\omega_\ell$, $\widetilde{R}_{01\cdots\ell}$をその曲率とする。$P: gl(n;\mathbb{R})\times\cdots\times gl(n;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$を次数$k$の不変多項式とする。

<u>定義</u>　次式で定義されるM上の$(2k-\ell)$-次微分形式$P_E^{\ell,2k-\ell}(\omega_0,\cdots,\omega_\ell)$を, 不変多項式$P$と, 接続$\omega_0,\cdots,\omega_\ell$に対応したdifference cochainと呼ぶ。

$$P_E^{\ell,2k-\ell}(\omega_0,\cdots,\omega_\ell)=\int_{\Delta^\ell} P(\widetilde{R}_{01\cdots\ell},\cdots,\widetilde{R}_{01\cdots\ell})$$

ここに$\int_{\Delta^\ell}:\Omega^q(M\times\Delta^\ell)\to\Omega^{q-\ell}(M)$はfibre integration.

<u>例</u> ① $P_E^{0,2k}(\omega_0)$は, 接続ω_0と, 不変多項式Pに対応した特性微分形式である。

② $\ell>k$のとき, $P_E^{\ell,2k-\ell}(\omega_0,\cdots,\omega_\ell)=0$である。

<u>補題</u> (coboundary formula)

$$dP_E^{\ell,2k-\ell}(\omega_0,\cdots,\omega_\ell)=\sum_\mu(-1)^\mu P_E^{\ell-1,2k-\ell+1}(\omega_0,\cdots,\widehat{\omega}_\mu,\cdots,\omega_\ell).$$

<u>例</u> $l=1$ のとき, $dP_E^{1,2k-1}(\omega_0,\omega_1)=P_E^{0,2k}(\omega_1)-P_E^{0,2k}(\omega_1)$ は, 2つの接続 ω_0,ω_1 に対応する特性形式の差が exact であることを示す。

2.3. 許容単体系.　　X_i^{n-p} に対して　$C(i)=\{l : X_l^n \succ X_i^{n-p}\}$, $\Delta(C(i))$ を $C(i)$ の元を頂点とする抽象単体, $J_*(i)$ をその鎖複体とする。$X_j^{n-p+1}\succ X_i^{n-p}$ のとき自然に $J_*(j)\subset J_*(i)$ とみなせる。

<u>定義</u> 許容単体系とは X_i^{n-p} に対して $D_i\in J_p(i)$ を対応させる対応で, 次の i) ii) をみたすものとする。

(i) X_l^n に対し, $D_l=\Delta^0(l)$.

(ii) X_i^{n-p} に対し $(p\geq 1)$, $\displaystyle \partial D_i=\sum_{j:\, X_j^{n-p+1}\succ X_i^{n-p}} \varepsilon_{ij} D_j$.

2.4. piecewise connection と Chern-Weil chain

<u>定義</u>　$X=\bigcup X_i^{n-p}$ 上の piecewise connection とは, X の各, n 単体 X_l^n 上の TX_l^n の接続 ω_l の集合 $\{\omega_l\}$ のことである。

piecewise connection $\{\omega_l\}$ が与えられているとき, $J_p^i\ni\Delta^p(l_0,\cdots,l_p)$ と, 不変多項式 P に対して, $P_{TX|X_i}^{p,2k-p}(\Delta^p(l_0,\cdots,l_p),\{\omega_l\})$ $=P_{TX|X_i}^{p,2k-p}(\omega_{l_0},\cdots,\omega_{l_p})\in\Omega^{2k-p}(X_i)$ とする。また $J_p(i)\ni D_i=$ $=\sum_\lambda c_\lambda\Delta_\lambda$ に対して, $P_{TX|X_i}^{p,2k-p}(D_i,\{\omega_l\})=\sum_\lambda c_\lambda P_{TX|X_i}^{p,2k-p}(\Delta_\lambda,\{\omega_l\})$ とする。

difference cochain の coboundary formula と, 許容単体系の性質とから次の命題が証明できる。

命題　Pを次数kの不変多項式，$\{\omega_e\}$を$X^n=\bigcup X_i^{n-p}$のpiecewise connectionとする．$\{D_i\}$を許容単体系とする。このとき，

$$\sum_p \sum_{i=X_i^{n-p}} P^{p,2k-p}_{TX|X_i}(D_i,\{\omega_e\}) \in \bigoplus_{p+q=2k} C^{p,q}$$

は$(d\pm\delta)$-closedであり，その$(d\pm\delta)$-cohomology類は，$\{D_i\}$ $\{\omega_e\}$のとり方によらない。

とくに，$\{\omega_e\}$としてglobalなconnectionをとれば，$P^{p,2k-p}=0$ $(p>0)$，$P^{0,2k}$は普通の特性形式であるから次の系が成り立つ。

系　2.1.のde Rhamの定理の同型により，$\sum_p \sum_i P^{p,2k-p}_{TX|X_i}(D_i,\{\omega_e\})$のあらわすcohomology類は不変多項式$P$に対応した特性類である。

2.5. 以下では$P: gl(n)\times gl(n)\to\mathbb{R}$，$P(X,Y)=\mathrm{tr}(XY)+\mathrm{tr}X\cdot\mathrm{tr}Y$を考える。$-1/8\pi^2 P$に対応する特性類がfirst Pontryagin類であることが知られている。

定義　$X=\bigcup X_i^{n-p}$のPD-connectionとは次のような特殊なpiecewise connectionである：n単体X_e^nに対して，$t_0,\dots,t_n$をその重心座標とする。ω_eはTX_e^nの枠$\frac{\partial}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_n}$を水平枠とするflat connectionである。

<u>補題</u> PD-connection $\{\omega_\ell\}$ に対して，$p\neq 2$ のとき，$P^{p,4-p}_{TX/X_i}($ $D_i, \{\omega_\ell\})=0$ である。i.e. この場合 $p_1(X)$ は homogeneous な，(2,2)-chain $\sum_{k:X_k^{n-2}} P^{2,2}_{TX/X_k}(D_k, \{\omega_\ell\})$ であ~~…~~らわされる。

2.6. この §の言葉を用いれば，定理I (1.6.) は次の定理I′の特殊な場合 ($n=4$) として従うことがわかる。

<u>定理I′</u> $X=\bigcup X_i^{n-p}$ の (3,1)-chain

$$\sum_{j:X_j^{n-3}}\ \sum_{k:X_k^{n-2}>X_j^{n-3}}\ \sum_{\Delta_\mu\in D_{jk}} \frac{1}{8\pi^2}\,\varepsilon_{jk}\, d\,\Phi(\chi(\Delta_\mu))$$

は単体的 de Rham 複体の中で，first Pontrjagin class を表わす cycle である。

そこで，(2,2)-chain $P^{2,2}_{TX/X_k}(D_k, \{\omega_\ell\})$，($\{\omega_\ell\}$ は PD-connection) を計算することにより，それが定理I′の (3,1)-chain $\sum_j \sum_k \sum_{\Delta_\mu} \varepsilon_{jk} d\,\Phi(\chi(\Delta_\mu))$ と，$(d\pm\delta)$-cohomologous であることを見る。

§3 $X^n=\bigcup X_i^{n-p}$ を滑らかな三角形分割，$P: gl(n;\mathbb{R})\times gl(n;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$; $P(X,Y)=\mathrm{tr}(X\cdot Y)+\mathrm{tr}X\cdot\mathrm{tr}Y$ とする。

3.1. <u>補題</u> $\{\omega_\ell\}$ を PD-connection とする。X_k^{n-2} について，

$$P^{2,2}_{TX/X_k}(\omega_{\ell_0}, \omega_{\ell_1}, \omega_{\ell_2}) = P^{2,2}_{E_k}(\omega'_{\ell_0}, \omega'_{\ell_1}, \omega'_{\ell_2}).$$

ここに，$\ell_\nu\in C(k)$，$E_k = TX|X_k/TX_k$ で，ω'_{ℓ_ν} は ω_{ℓ_ν} が

E_kにinduceする接続.

3.2. $P^{2,2}$の計算: 一般に$E\to M$を$\mathbb{R}^2$ bundle, $m_0, \cdots, m_N$をそのsectionで, 一般の位置にあるものとする。$\langle m_{j_0}, m_{j_1}\rangle$で$E$の枠$(m_{j_0}, m_{j_1})$を水平枠とする接続をあらわす。

<u>補題</u>

$$\begin{pmatrix} m_{j_1} \\ m_{j'_1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m_{j_0} \\ m_{j'_0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_{j_2} \\ m_{j'_2} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} m_{j_0} \\ m_{j'_0} \end{pmatrix}, \quad A, B : M \to GL(2; \mathbb{R})$$

とするとき, $P_E^{2,2}(\langle m_{j_0}, m_{j'_0}\rangle, \langle m_{j_1}, m_{j'_1}\rangle, \langle m_{j_2}, m_{j'_2}\rangle) = \mathrm{tr}(A^{-1}dA \wedge B^{-1}dB) +$
$+ (\mathrm{tr}\, A^{-1}dA) \wedge (\mathrm{tr}\, B^{-1}dB)$.

<u>系</u> (1) $P_E^{2,2}(\langle m_0, m_3\rangle, \langle m_1, m_3\rangle, \langle m_2, m_3\rangle) = 0$.

(2) $P_E^{2,2}(\langle m_1, m_2\rangle, \langle m_0, m_2\rangle, \langle m_0, m_1\rangle) = 2\, d\log|a| \wedge d\log|b|$

ここに $m_0 = am_1 + bm_2$; $a, b : M \to \mathbb{R}$.

3.3. 3.1.と3.2.とを用いて, $P^{2,2}_{TX|X_k}(D_k, \{\omega_\ell\})$をexact formとしてあらわすためには, PD-connection $\{\omega_\ell\}$と, 許容単体系D_kを"解体"する必要がある。そのための記号の準備をする。

X_k^{n-2}に対して$S(k) = \{\ell ; X_\ell^{n-1} > X_k^{n-2}\}$とする。$S(k) \ni \ell$に対して$m_{k\ell} \in \Gamma(TX|X_k)$を$X_k$の$X_\ell$内での法ベクトル(1.4.)とする。$S^2(k) = \{(\ell_0, \ell_1) ; \ell_0, \ell_1 \in S(k), \ell_0 \neq \ell_1\}$とする。$\hat{J}_*(k)$を$S^2(k)$の張る抽象単体の鎖複体とする。$C(k) \to S^2(k) ; \alpha \mapsto (\ell_{\alpha+}, \ell_{\alpha-})$,
$X_\alpha^n \begin{smallmatrix} > X^{n-1}_{\ell_{\alpha+}} \\ > X^{n-1}_{\ell_{\alpha-}} \end{smallmatrix} > X_k^{n-2}$ により$J_*(k) \subset \hat{J}_*(k)$とみなす。(c.f. 2.3.)

$\hat{J}_2(k) \ni \Delta^2((\ell_0, \ell'_0), (\ell_1, \ell'_1), (\ell_2, \ell'_2))$に対して, $P^{2,2}_{E_k}(\Delta^2) =$

$= P^{2,2}_{E_k}(\langle m_{k\ell_0}, m_{k\ell_0'}\rangle, \langle m_{k\ell_1}, m_{k\ell_1'}\rangle, \langle m_{k\ell_2}, m_{k\ell_2'}\rangle)$ とする。（3.2. 参照，ここでは自然な射影により $m_{k\ell_\nu} \in \Gamma(E_k)$ とみなした。）

この定義は $D_k \in J_2(k)$ と PD-connection $\{w_i\}$ についての，$P^{2,2}_{TX|X_k}(D_k, \{w_i\})$ と compatible であることに注意する。

<u>定義</u>　① $\hat{I}_2(k)$ を $\Delta^2((\ell_1,\ell_2),(\ell_0,\ell_2),(\ell_0,\ell_1))$ の形の 2-simplex で張られる $\hat{J}_2(k)$ の部分群とする。$\Delta^2((\ell_1,\ell_2),(\ell_0,\ell_2),(\ell_1,\ell_2))$ を $\Delta^{0,1}(\ell_0,\ell_1,\ell_2)$ と書くことにする。

② $\hat{I}_2'(k)$ を $\Delta^2((\ell_0,\ell_3),(\ell_1,\ell_3),(\ell_2,\ell_3))$ の形の 2-simplex で張られる $\hat{J}_2(k)$ の部分群とする。

3.2. により，$c \in \hat{I}_2(k)$ に対して $P^{2,2}_{E_k}(c)$ は，exact form として canonical にあらわされ，$c' \in \hat{I}_2'(k)$ に対しては $P^{2,2}_{E_k}(c') = 0$ であることに注意する。

3.4.　X_k^{n-2} の link S_k^1 の D^2 への拡張を D_k^2 とする。(1.2.).

<u>補題1.</u>　$\displaystyle \sigma_k = \sum_{D_k^2 \ni \Delta_\mu^2 = \Delta^2(\ell_0,\ell_1,\ell_2)} \Delta^{0,1}(\ell_0,\ell_1,\ell_2) \in \hat{I}_2(k) \subset \hat{J}_2(k)$ とする。

D_k を X_k^{n-2} に対応する許容単体系の元とするとき，$\hat{J}_1(k)$ 内で，

$$\partial D_k = \partial \sigma_k \mod \partial \hat{I}_2'(k) .$$

（証明）　S_k^1 の頂点の数に関する帰納法による。.

補題2. $P^{2,2}_{E_k}(D_k, \{W_\ell\}) = P^{2,2}_{E_k}(b_k)$.

(証明) 補題1と, difference cochain の性質 $P^{3,1}=0$, および, 3.2. の系から従う。

定義 $\Delta^{0,1}(\ell_0, \ell_1, \ell_2) \in \hat{I}_2(k)$ に対し, $S(\Delta^{0,1}(\ell_0, \ell_1, \ell_2)) =$
$= \log|a|\, d\log|b| - \log|b|\, d\log|a|$, ここに $m_{k\ell_0} = a\, m_{k\ell_1} + b\, m_{k\ell_2}$ とする。

3.2. 系(1) および補題2から,

補題3 $P^{2,2}_{E_k}(b_k) = dS(b_k)$.

補題3から (3,1)-chain $\delta\{\sum_{k: X_k^{n-2}} S(b_k)\}$ は, $\{P^{2,2}_{E_k}(D_k, \{W_\ell\})\}$ と $(d\pm\delta)$-homologous である。$\delta\{S(b_k)\} = \sum_j \sum_k \sum_\mu \varepsilon_{jk}\, d\Phi(\chi(\Delta_\mu))$ であること (2.6. 定理I′) を見る。

3.5. 定義 X_j^{n-3} に対して, $S(j) = \{k : X_k^{n-2} \supset X_j^{n-3}\}$, $k \in S(j)$ に対して $m_{jk} \in \Gamma(TX|X_j)$ を X_j の X_k 内での法ベクトルとする。記号 $\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_2 ; k_3)$, $k_\mu \in S(j)$, $k_\mu \neq k_\nu$ に対して, X_j 上の 1-form $S(\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_2 ; k_3))$ を次式で定義する。

$$S(\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_2 ; k_3))(x) = \log|a|\, d\log|b| - \log|b|\, d\log|a|.$$

ここに $m_{jk_0} = a\, m_{jk_1} + b\, m_{jk_2} + c\, m_{jk_3}$ in E_j.

計算により，次の公式が成立することがわかる。

公式 (1) $S(\Delta^{0,1}(k_1,k_2,k_3:k_0))-S(\Delta^{0,1}(k_0,k_2,k_3:k_1))+S(\Delta^{0,1}(k_0,k_1,k_3:k_2))$
$-S(\Delta^{0,1}(k_0,k_1,k_2:k_3))=0.$

(2) $S(\Delta^{0,1}(k_1,k_2,k_3:k_4))-S(\Delta^{0,1}(k_0,k_2,k_3:k_4))+S(\Delta^{0,1}(k_0,k_1,k_3;k_4))$
$-S(\Delta^{0,1}(k_0,k_1,k_2:k_4))=-d\,\Phi(x).$

ここに Φ は Abel-Rogers の函数 (1.1) $x=bc/ad$.

$$\begin{pmatrix} m_{jk_0} \\ m_{jk_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{jk_2} \\ m_{jk_3}\end{pmatrix} \bmod m_{jk_4} \text{ in } E_j.$$

補題1 $\delta\{\sum_{k:X_k^{n-2}} S(b_k)\}=\{f_j\}$ $f_j\in\Omega^1(X_j^{n-3})$ とするとき，

$$f_j=\sum_{k\in S(j)}\varepsilon_{jk}\sum_{D_k^2\ni\Delta_\mu^2=\Delta_\mu(l_0,l_1,l_2)} S(\Delta^{0,1}(\varphi_{jk}(l_0),\varphi_{jk}(l_1),\varphi_{jk}(l_2));k)).$$

ここに，$\varphi_{jk}:S(k)\to S(j)$; $\varphi_{jk}(l)\in S(j)$ は，

$$X_l^{n-1}\begin{array}{l}>X_k^{n-2}\\ >X_{\varphi_{jk}(l)}^{n-2}\end{array}>X_j^{n-2}$$ で決まるもの。

証明 m_{ij} の "compatibility" $m_{kl}|X_j=m_{j\varphi_{jk}(l)}$ に注意すれば，$S(b_k)$，δ 等の定義から直接従う。

補題2 $$\sum_{k\in S(j)}\sum_{D_{jk}^3\ni\Delta_\mu}\varepsilon_{jk}\,d\Phi(x(\Delta_\mu))=$$

$$=\sum_{k\in S(j)}\sum_{D_k^2\ni\Delta_\nu=\Delta_\nu(l_0,l_1,l_2)}\varepsilon_{jk}S(\Delta^{0,1}(\varphi_{jk}(l_0),\varphi_{jk}(l_1),\varphi_{jk}(l_2));k).$$

証明　公式(2)より，$\Delta_\mu = \Delta_\mu(a_1, a_2, a_3, a_4) \in D_{jk}^3$ に対して，

$$d\Phi(\chi(\Delta_\mu)) = S(\Delta^{0,1}(a_2, a_3, a_4 : k)) - \cdots\cdots - S^{0,1}(\Delta^{0,1}(a_1, a_2, a_3 : k))$$

$$\therefore \sum_{D_{jk}^3 \ni \Delta_\mu^3} d\Phi(\chi(\Delta_\mu)) = \sum_{D_{jk}^3 \ni \Delta_\nu^2 = \Delta_\nu^2(a_1, a_2, a_3)} \sum_{\Delta_\mu^3 > \Delta_\nu^2} [\Delta_\mu^3 : \Delta_\nu^2] S(\Delta^{0,1}(a_1, a_2, a_3 : k))$$

$$= \sum_{S_{jk}^2 \ni \Delta_\nu^2 = \Delta_\nu(a_1, a_2, a_3)} S(\Delta^{0,1}(a_1, a_2, a_3 : k))$$

$$= \sum_{D_k^2 \ni \Delta_\nu = \Delta_\nu(a_1, a_2, a_3)} S(\Delta^{0,1}(a_1, a_2, a_3 : k)) +$$

$$+ \sum_{S_{jk}^2 - D_k^2 \ni \Delta_\mu = \Delta_\mu(b_1, b_2, b_3)} S(\Delta^{0,1}(b_1, b_2, b_3 : k))$$

後の項は，$k \in S(j)$についての和をとるとき，公式(1)によりcancelするから，補題2，従って定理I′が証明できた。　.

——— 以上 ———